

**Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы** : учебное пособие для вузов / [О. А. Кастрица и др.] — Минск : Вышэйшая школа, 2015. — 388, [1] с. : ил. — Библиогр. : с. 384.  
УДК [517 + 517.52 + 517.382](075.8)  
ББК 22  
**Ч/З №1 — 1 экз.**

Даны необходимые теоретические сведения, которые сопровождаются большим количеством примеров, поясняющих введенные понятия и теоремы. Приведены образцы контрольных работ с решениями и упражнения для самостоятельного выполнения, снабженные ответами.

Для студентов учреждений высшего образования по физическим, математическим и экономическим специальностям. Может быть полезно преподавателям, аспирантам, магистрантам и студентам всех естественнонаучных специальностей.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЯДЫ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Допущено  
Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия  
для студентов учреждений высшего образования  
по физическим, математическим и экономическим  
специальностям



Минск  
«Вышэйшая школа»  
2015

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие .....	3
<b>Глава 1. Числовые ряды и бесконечные произведения .....</b>	<b>5</b>
1.1. Сходимость числового ряда .....	5
1.1.1. Основные понятия .....	5
1.1.2. Общие принципы сходимости рядов .....	7
1.1.3. Знакопостоянные ряды .....	11
1.1.4. Знакопеременные ряды .....	21
1.2. Действия над рядами .....	28
1.2.1. Группировка членов ряда .....	28
1.2.2. Перестановка членов ряда .....	29
1.2.3. Перемножение рядов .....	29
1.3. Повторные и двойные ряды .....	32
1.3.1. Сходимость двойного ряда .....	32
1.3.2. Свойства двойных рядов .....	36
1.4. Бесконечные произведения .....	39
1.4.1. Основные понятия .....	39
1.4.2. Сходимость бесконечного произведения .....	40
1.4.3. Действия с бесконечными произведениями .....	45
<i>Упражнения</i> .....	45
<i>Ответы</i> .....	56
<i>Вариант контрольной работы</i> .....	58
<b>Глава 2. Функциональные последовательности и ряды .....</b>	<b>63</b>
2.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов .....	63
2.1.1. Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов .....	63
2.1.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей .....	65
2.1.3. Равномерная сходимость функциональных рядов .....	68
2.1.4. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов .....	70
2.2. Функциональные свойства рядов и последовательностей .....	75
2.2.1. Основные теоремы .....	75
2.2.2. Локальная равномерная сходимость .....	81

2.2.3. Рекомендации по исследованию рядов на равномерную сходимость .....	84
<i>Упражнения</i> .....	85
<i>Ответы и указания</i> .....	94
<i>Задания для лабораторных работ</i> .....	97
<i>Вариант контрольной работы</i> .....	102
<b>Глава 3. Степенные ряды</b> .....	109
3.1. Сходимость степенного ряда .....	109
3.1.1. Интервал сходимости степенного ряда .....	109
3.1.2. Радиус сходимости степенного ряда .....	109
3.1.3. Множество сходимости степенного ряда .....	110
3.1.4. Степенные ряды с комплексными членами .....	116
3.2. Свойства суммы степенного ряда .....	118
3.2.1. Непрерывность суммы степенного ряда .....	118
3.2.2. Почленное интегрирование степенного ряда .....	118
3.2.3. Почленное дифференцирование степенного ряда .....	119
3.3. Представление функций степенными рядами .....	121
3.3.1. Ряд Тейлора .....	121
3.3.2. Основные разложения .....	123
3.4. Действия со степенными рядами .....	125
3.4.1. Линейная комбинация степенных рядов .....	125
3.4.2. Перемножение степенных рядов .....	126
3.4.3. Композиция степенных рядов (подстановка ряда в ряд) .....	127
3.4.4. Деление степенных рядов .....	128
3.4.5. Приемы разложения функций в степенные ряды .....	130
3.5. Использование степенных рядов .....	137
3.6. Обобщенное суммирование числовых рядов .....	142
<i>Упражнения</i> .....	145
<i>Ответы</i> .....	151
<i>Вариант контрольной работы</i> .....	156
<b>Глава 4. Несобственные интегралы</b> .....	163
4.Г. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку .....	163
4.1.1. Несобственный интеграл первого рода .....	163
4.1.2. Вычисление и преобразование НИ-1 .....	168
4.1.3. НИ-1 от положительных функций .....	169
4.1.4. НИ-1 от произвольных функций .....	175

4.1.5. Несобственный интеграл по произвольному неограниченному промежутку .....	179
4.2. Несобственный интеграл от неограниченной функции .....	180
4.2.1. Несобственный интеграл второго рода .....	180
4.2.2. Вычисление и преобразование НИ-2 .....	185
4.2.3. НИ-2 от положительных функций .....	187
4.2.4. НИ-2 от произвольных функций .....	194
4.2.5. Несобственные интегралы смешанного типа .....	197
4.3. Главное значение несобственных интегралов .....	201
4.3.1. Главное значение НИ-1 .....	201
4.3.2. Главное значение НИ-2 .....	202
<i>Упражнения</i> .....	202
<i>Ответы</i> .....	215
<i>Вариант контрольной работы</i> .....	217
<b>Глава 5. Интегралы, зависящие от параметра</b> .....	<b>223</b>
5.1. Частные пределы .....	223
5.1.1. Частные и равномерные частные пределы .....	223
5.1.2. Критерии равномерной сходимости .....	225
5.1.3. Непрерывность частного предела .....	228
5.2. Интеграл, зависящий от параметра .....	229
5.2.1. Функция, определяемая как интеграл .....	229
5.2.2. Переход к пределу в ИЗОП .....	230
5.2.3. Интегрирование ИЗОП .....	232
5.2.4. Дифференцирование ИЗОП .....	233
5.2.5. ИЗОП с переменными пределами .....	235
5.3. Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра ....	238
5.3.1. Определение несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра .....	238
5.3.2. Критерии равномерной сходимости НИЗОП-1 .....	241
5.3.3. Признаки равномерной сходимости НИЗОП-1 .....	244
5.3.4. Непрерывность НИЗОП-1 .....	248
5.3.5. Дифференцирование НИЗОП-1 .....	251
5.3.6. Интегрирование НИЗОП-1 .....	252
5.4. Несобственный интеграл второго рода, зависящий от параметра ....	254
5.4.1. Определение несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра .....	254
5.4.2. Равномерная сходимость НИЗОП-2 .....	256

5.4.3. Признаки равномерной сходимости НИЗОП-2	258
<i>Упражнения</i>	263
<i>Ответы</i>	271
<i>Вариант контрольной работы</i>	273
<b>Глава 6. Именные интегралы</b>	280
6.1. Эйлеровы интегралы	280
6.1.1. Интеграл Эйлера	280
6.1.2. В-функция Эйлера	284
6.1.3. Г-функция Эйлера	288
6.2. Другие именные интегралы	299
6.2.1. Интеграл Пуассона	299
6.2.2. Интеграл Дирихле	302
6.2.3. Разрывный множитель Дирихле	305
6.2.4. Интегралы Лапласа	306
6.2.5. Интегралы Фруллани	308
6.2.6. Интегралы Френеля	312
<i>Упражнения</i>	317
<i>Ответы</i>	320
<i>Вариант контрольной работы</i>	321
<b>Глава 7. Ряды и интегралы Фурье</b>	326
7.1. Ортогональные системы функций	326
7.1.1. Скалярное произведение функций	326
7.1.2. Тригонометрическая система	327
7.1.3. Расстояние между функциями	328
7.1.4. Тригонометрические многочлены наилучшего приближения	329
7.1.5. Тригонометрический ряд Фурье	331
7.2. Ряд Фурье периодической функции	333
7.2.1. Периодические функции	333
7.2.2. Ряд Фурье четной (нечетной) функции	334
7.2.3. Сходимость ряда Фурье в точке	337
7.2.4. Равномерная сходимость ряда Фурье	342
7.3. Ряд Фурье функции, заданной на промежутке	345
7.3.1. Неравенство Бесселя	345
7.3.2. Сходимость в среднем ряда Фурье	345
7.4. Представление функций рядами Фурье специального вида	348

7.4.1. Разложение в ряд по косинусам (синусам) . . . . .	348
7.4.2. Комплексная форма ряда Фурье . . . . .	352
7.4.3. Ряд Фурье периодической функции с произвольным периодом . . . . .	353
7.5. Интеграл Фурье . . . . .	358
7.5.1. Представление функции интегралом Фурье . . . . .	358
7.5.2. Интеграл Фурье четной (нечетной) функции . . . . .	361
7.6. Интегральное преобразование Фурье . . . . .	365
7.6.1. Преобразование Фурье . . . . .	365
7.6.2. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье . . . . .	366
7.6.3. Основные свойства преобразования Фурье . . . . .	368
<i>Упражнения</i> . . . . .	369
<i>Ответы</i> . . . . .	372
<i>Вариант контрольной работы</i> . . . . .	375
Рекомендуемая литература . . . . .	384