

Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика: учебное пособие / В. С. Шипачев. — 3-е изд. — Москва: Инфра-М, 2015. — 349, [1] с. — (Высшее образование). УДК 517(075.8)

ББК 22

Ч/З №1 — 1 экз.

В книге в доступной форме рассмотрены важнейшие понятия математического анализа функций одной переменной: числовые последовательности и их пределы; функции, пределы и непрерывность функций; производные и интегралы, их применения и приложения.

Многочисленные подробно разобранные примеры и задачи способствуют глубокому освоению теории и позволяют развить самостоятельное математическое мышление. Вопросы для самопроверки позволяют проконтролировать степень усвоения материала.

Для студентов очных и заочных отделений высших учебных заведений. Может быть полезна студентам техникумов и колледжей, учащимся школ, лицеев и гимназий.

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



В.С. ШИПАЧЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Третье издание

*Допущено
УМО по образованию
в области прикладной математики
и управления качеством в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
«Прикладная математика»*

Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com

Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту
3-го поколения

Москва
ИНФРА-М
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	
§ 1.1. Понятия множества и подмножества. Обозначения	5
§ 1.2. Вещественные (действительные) числа и их основные свойства	7
§ 1.3. Геометрическое изображение вещественных чисел	15
1. Изображение вещественных чисел точками на координатной прямой (15). 2. Наиболее употребительные числовые множества (16).	
§ 1.4. Грани числовых множеств	17
§ 1.5. Абсолютная величина числа	23
§ 1.6. Метод математической индукции	27
§ 1.7. Факториал	29
§ 1.8. Соединения и формула бинома Ньютона	31
1. Соединения (31). 2. Формула бинома Ньютона (35).	
§ 1.9. Числовые последовательности	37
1. Числовые последовательности и арифметические действия над ними. Прогрессии (37). 2. Ограниченные и неограниченные последовательности (46). 3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (47). 4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей (49).	
§ 1.10. Сходящиеся последовательности	53
1. Понятие сходящейся последовательности (53). 2. Основные свойства сходящихся последовательностей (60). 3. Предельный переход в неравенствах (70).	
§ 1.11. Монотонные последовательности	74
1. Определение и признак сходимости монотонных последовательностей (74). 2. Число e (78). 3. Теорема о вложенных отрезках (81).	

Глава 2. ФУНКЦИЯ

- § 2.1. Понятие функции 84
1. Определение функции и основные понятия (85). 2. Способы задания функций (91). 3. Понятия сложной и обратной функций (93). 4. Классификация функций (95). 5. Четные и нечетные функции (96). 6. Периодические функции (98).
- § 2.2. Предел функции 100
1. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ (100). 2. Предел функции при $x \rightarrow x_0^-$ и при $x \rightarrow x_0^+$ (108). 3. Предел функции при $x \rightarrow \infty$, при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$ (110).
- § 2.3. Теоремы о пределах функций 113
- § 2.4. Два замечательных предела 117
1. Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (117).
2. Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (118).
- § 2.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции 120
1. Бесконечно малые функции (120). 2. Бесконечно большие функции (127).
- § 2.6. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций 130
- § 2.7. Вычисление пределов функций 133
- § 2.8. Понятие непрерывности функции 136
1. Определение непрерывности функции (136). 2. Арифметические действия над непрерывными функциями (140).
- § 2.9. Непрерывность некоторых элементарных функций 141
1. Непрерывность рациональных функций (141).
2. Непрерывность тригонометрических функций (142).
3. Непрерывность функции $f(x) = |x|$ (143). 4. Продолжение вычисления пределов функций (144).
- § 2.10. Определение и классификация точек разрыва функции 149
- § 2.11. Теорема о непрерывности сложной функции 150
- § 2.12. Основные свойства непрерывных функций 151
1. Теорема об устойчивости знака непрерывной функции (151). 2. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение (151). 3. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке (154). 4. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных граней (155). 5. Понятие равномерной непрерывности функции (158). 6. Теорема о равномерной непрерывности функции (161).
- § 2.13. Теорема о непрерывности обратной функции 165

Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

- § 3.1. Понятие производной 169
1. Определение производной (169). 2. Геометрический смысл производной (171). 3. Физический смысл производной (174). 4. Правая и левая производные (176).
- § 3.2. Понятие дифференцируемости функции. 177
1. Понятие дифференцируемости функции в данной точке (177). 2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности (178).
- § 3.3. Понятие дифференциала 180
1. Определение и геометрический смысл дифференциала (180). 2. Приближенные вычисления с помощью дифференциала (181).
- § 3.4. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного 183
- § 3.5. Вычисление производных постоянной, степенной, тригонометрических функций и логарифмической функции 184
1. Производная постоянной функции (184). 2. Производная степенной функции (185). 3. Производные тригонометрических функций (185). 4. Производная логарифмической функции (186).
- § 3.6. Теорема о производной обратной функции. 188
- § 3.7. Вычисление производных показательной функции и обратных тригонометрических функций 189
1. Производная показательной функции (189). 2. Производные обратных тригонометрических функций (190).
- § 3.8. Правило дифференцирования сложной функции. Дифференциал сложной функции 192
1. Правило дифференцирования сложной функции (192). 2. Дифференциал сложной функции (194).
- § 3.9. Логарифмическая производная. Производная степенной функции с любым вещественным показателем. Таблица производных простейших элементарных функций 195
1. Понятие логарифмической производной функции (195). 2. Производная степенной функции с любым вещественным показателем (197). 3. Таблица производных простейших элементарных функций (198). 4. Таблица дифференциалов простейших элементарных функций (199).
- § 3.10. Производные и дифференциалы высших порядков 200
1. Понятие производной n -го порядка (200). 2. n -е производные некоторых функций (201). 3. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций (202). 4. Дифференциалы высших порядков (206).

§ 3.11.	Параметрическое задание функции и ее дифференцирование	208
	1. Параметрическое задание функции (208). 2. Дифференцирование функции, заданной параметрически (209).	
§ 3.12.	Основные теоремы дифференциального исчисления	211
§ 3.13.	Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя	218
	1. Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$ (218). 2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (221). 3. Другие виды неопределенностей и их раскрытие (222).	
§ 3.14.	Формула Тейлора	225
	1. Формула Тейлора (225). 2. Другая запись формулы Тейлора и остаточного члена (227). 3. Формула Маклорена (227). 4. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена (228). 5. Использование формулы Маклорена для вычисления пределов (229). 6. Вычисление числа e (230).	
§ 3.15.	Исследование поведения функций и построения графиков	232
	1. Признак монотонности функции (232). 2. Отыскание точек локального экстремума функции (232). 3. Задачи на максимум и минимум (235). 4. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции (243). 5. Асимптоты графика функции (248). 6. Схема исследования графика функции (251).	
Глава 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ		
§ 4.1.	Первообразная и неопределенный интеграл	262
	1. Понятие первообразной функции (262). 2. Неопределенный интеграл (264).	
§ 4.2.	Основные свойства неопределенного интеграла	266
§ 4.3.	Таблица основных интегралов.	267
§ 4.4.	Основные методы интегрирования	269
	1. Непосредственное интегрирование (269). 2. Метод подстановки (272). 3. Метод интегрирования по частям (280).	
§ 4.5.	Определенный интеграл	287
	1. Определение определенного интеграла (287). 2. Основные свойства определенного интеграла (291). 3. Оценки интегралов. Формула среднего значения (293). 4. Условия существования определенного интеграла (296).	
§ 4.6.	Определенный интеграл с переменным верхним пределом	299

§ 4.7.	Формула Ньютона—Лейбница	301
§ 4.8.	Замена переменной в определенном интеграле	304
§ 4.9.	Формула интегрирования по частям в определенном интеграле	308
§ 4.10.	Некоторые физические и геометрические приложения определенного интеграла	310
	1. Площадь криволинейной трапеции (310). 2. Длина дуги кривой (317). 3. Площадь поверхности вращения (321). 4. Объем тела (325). 5. Работа переменной силы (328). 6. Давление жидкости (331).	
§ 4.11.	Несобственные интегралы	334
	1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (335). 2. Несобственные интегралы от не- ограниченных функций (336). 3. Признак сходимости не- собственных интегралов (338). 4. Пример использования несобственного интеграла (341).	
§ 4.12.	Приближенное вычисление определенных интегралов	342
	1. Формула трапеций (342). 2. Формула Симпсона (343).	